

対称二段段付両端固定はりの非線形自由振動

佐 藤 秀 紀*

Nonlinear Free Vibrations of Clamped Beams with Two Symmetric Steps

by

Hidenori SATO

Abstract

The nonlinear characteristics of the large-amplitude free vibrations of the clamped-clamped beams with two symmetric steps are studied.

Galerkin's method (one mode approximation) and the harmonic balance method (fundamental harmonic approximation) are used to obtain the solution. The beams with two different shapes, circular cross sections and constant-width rectangular ones, are considered. The effects of the diameter ratio or the thickness one between two sections and of the length ratio (the ratio of the length of middle element and the total length) on the nonlinearity are investigated under the restrictions that the weight and length of the beams are constant and the following results are mainly obtained. The nonlinearity of the stepped beams treated here is mostly greater than that of uniform ones. With the increase of the diameter ratio or the thickness one, the maximum value of the magnitude of the nonlinearity due to the change of the length ratio increases and also the length ratio corresponding to the maximum value approaches about 0.5.

The linear natural frequencies and the maximum bending stresses at a maximum displacement are also discussed in connection with the nonlinearity.

1. 緒 言

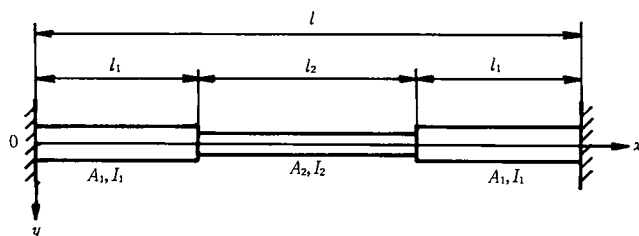
はりの非線形振動に関する研究においては一様断面はりに比べると変断面はりを扱った報告は比較的少ない^{1)~3)}。しかし、変断面はりは機械および構造物部材としてしばしば見受けられるものであり、最近の機械系の性能向上に伴い、複雑な部品のより厳密な動特性を求める必要が生じていることから、これらの変断面部材の非線形振動特性の解析を行うことは有要であると思われる。

本論文はこれらの観点から、変断面はりの一つである段付はりをとりあげ、対称二段段付両端固定はりの非線形自由振動において、全長および重量（体積）一定の制限の下ではりの形状が非線形性に及ぼす影響を明らかにしようとするものである。

* 機械工学科

2. 解 析

以下で扱う段付はりの形状を第1図に示す。はり中央に対して対称な段をもち、両端で固定されているものとする。はりの横振動における非線形性は曲率の変化によるもの、たわみ変形によって生ずる軸力によるもの、などが考えられているが、ピン支持や固定端のように、はり両端の軸方向移動が拘束されている場合には軸力による影響がほとんどを占めている⁴⁾。したがって以下では非線形性として軸力によるもののみを考慮するものとする。



第1図 対称二段段付両端固定はり

第1図のように x - y 座標をとり、はりがたわむことにより生ずる平均軸力を N とすると、各はり要素の横振動の運動方程式は次式となる。

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $w=y$ 軸方向のはりの変位、 E =縦弾性係数、 ρ =密度、 I =断面二次モーメント、 A =断面積、 t =時間である。なお、回転慣性およびせん断力の影響は、はりが細長く、一次の振動数のみを考えたことからこれを無視した。平均軸力 N は引張方向を正とし、はりの軸方向のびを考慮して次式で表わされるものとする。

$$N = \frac{k}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad k = \frac{1}{\int_0^l \frac{1}{EA} dx} \quad (2)$$

前述のように、以下では1次の基本振動モードについてのみ考察するものとする。したがって振動のモードは、はり中央に対して対称となるから、系を長さ $l/2$ の一端固定・他端ローラ端のはりと考えて計算する。

$\xi = x/(l/2)$ とし、考察しているはりの線形モード関数 $\phi(\xi)$ (付録参照) および未知の時間関数 $\eta(t)$ を用いて式 (1) の解を次式のように表わす。

$$w = \phi(\xi) \eta(t) \quad (3)$$

式 (3) を用いて式 (1) にガレルキン法を適用すると次式を得る。

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + \omega_L^2 (\eta + \beta \eta^3) = 0 \quad (4)$$

ここで、 ω_L は線形系としての固有角振動数であり、 β は非線形性の程度を表わす係数で次式で表わされる。

$$\beta = \frac{4k}{l^3 \omega_L^2} \frac{\left\{ \int_0^1 \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 d\xi \right\}^2}{\rho \int_0^1 A \phi^2 d\xi} \quad (5)$$

式 (4) の解として、中央点の振幅 a の基本調和振動 $\eta = a \sin \omega_N t$ を仮定すると、非線形自由振動の振動数 ω_N は基本波に関する調和バランス法*により次式で与えられる。

$$\omega_N = \omega_L \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta a^2} \quad (6)$$

一様断面はりの場合の諸量を添字 U を付けて表わすとする、式 (6) より次式を得る。

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \left(\frac{\beta}{\beta_U} \right) \bar{a}^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\left(\frac{\omega_N}{\omega_L} \right)}{\left(\frac{\omega_{UN}}{\omega_{UL}} \right)} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{4} \bar{a}^2 \frac{\beta}{\beta_U}}{1 + \frac{3}{4} \bar{a}^2}} \quad (8)$$

ここに \bar{a} は次式で表わされる無次元振幅である。

$$\bar{a} = \sqrt{\beta_U} a \quad (9)$$

また、 β_U は r_U を一様断面はりの回転半径とすると次式で与えられる³⁾。

$$\beta_U = 0.05995 \frac{1}{y_U^2} \quad (10)$$

式 (5) および付録の式(A1), (A2) より β/β_U は次式のような無次元量で表わせることがわかる。

$$\beta/\beta_U = f(p_I, p_A, q_I, q_A, q_l) \quad (11)$$

ここに、 $p_I = I_2/I_1$, $p_A = A_2/A_1$, $q_I = I_2/I_U$, $q_A = A_2/A_U$, $q_l = l_2/l$ である。

また、重量一定の関係より

$$A_U l = 2A_1 l_1 + A_2 l_2 \quad (12)$$

あるいは

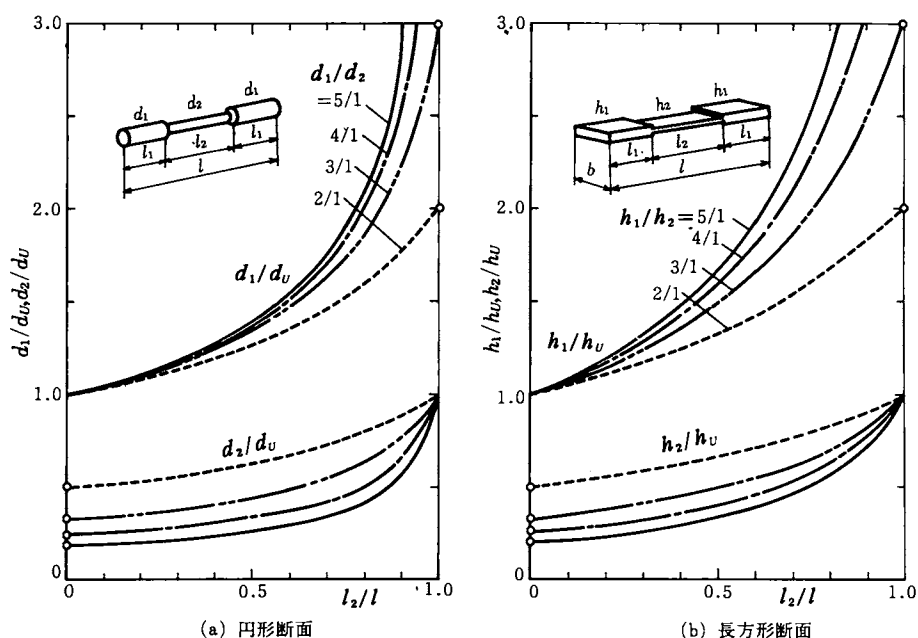
$$q_A = \frac{p_A}{1 + q_l(p_A - 1)} \quad (13)$$

円形断面はりあるいは幅一定長方形断面はりの場合を考えると、 β/β_U はそれぞれの場合の断面寸法の比と長さ比 l_2/l の二つのパラメータにより表わされることがわかる。

3. はり形状と線形固有振動数

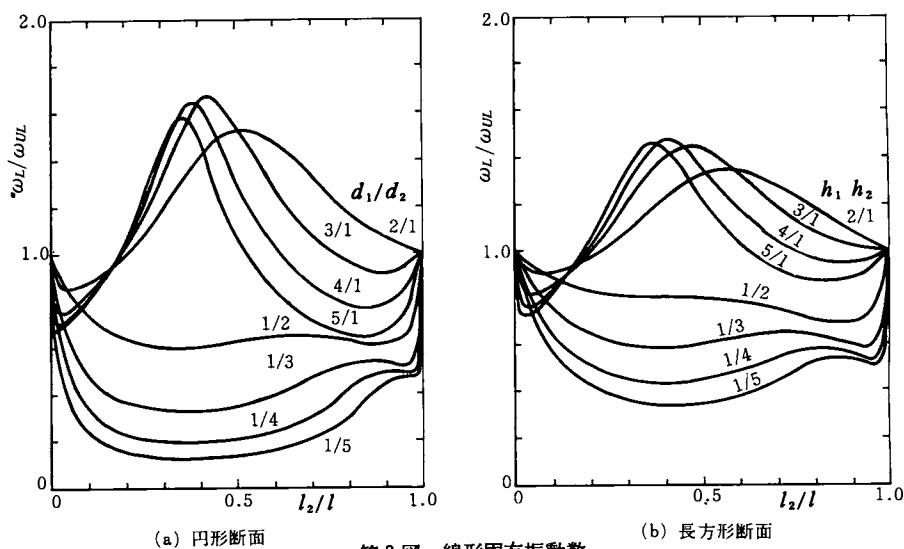
以下では数値例として、円形断面（直径 d_1, d_2 ）の場合と幅一定の長方形断面（厚さ h_1, h_2 ）の場合を考察する。第2図は式 (13) の関係を用いて計算した重量一定はりの形状を示したものである。 $l_2/l = 0$ および $l_2/l = 1.0$ の場合は特異な場合となり、○印で示した点は値を持たない。第3図はこれらのはりを両端で固定した系の線形固有振動数を一様断面はりの値を基準にとって示したもので

* 解をフーリエ級数で仮定し、各調波ごとにその係数和を零とおいてバランスをとる近似解法



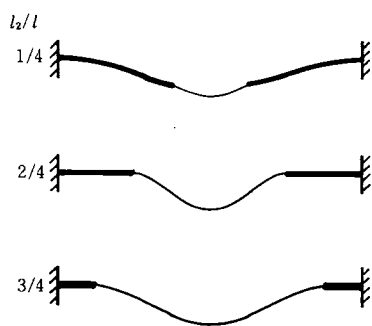
第2図 重量一定段付はりの形状

($d_1 < d_2$, $h_1 < h_2$ の場合は形状寸法の添字1, 2を入れ替える)



第3図 線形固有振動数

ある。図から明らかなように、線形固有振動数は断面形状によらず中央部細型 ($d_1 > d_2$ あるいは $h_1 > h_2$ の場合) の形状を以下ではこのように呼ぶものとする) と端部細型 ($d_1 < d_2$ あるいは $h_1 < h_2$ の場合) とでは形状による影響の傾向が異なり、質量と剛さの関係から前者の方が全般的に高く、しかも長さ比 l_2/l による変化が大きい。 $\omega_L/\omega_{UL} > 1.0$ の場合は一様断面はりの振動に対して、はりを段付とすることにより質量的効果よりばね的效果が現われたことになり、 $\omega_L/\omega_{UL} < 1.0$ の場合はその逆の効果をもったことになる。このことから考えると端部細型では常に変断面形状が質量的効果をも

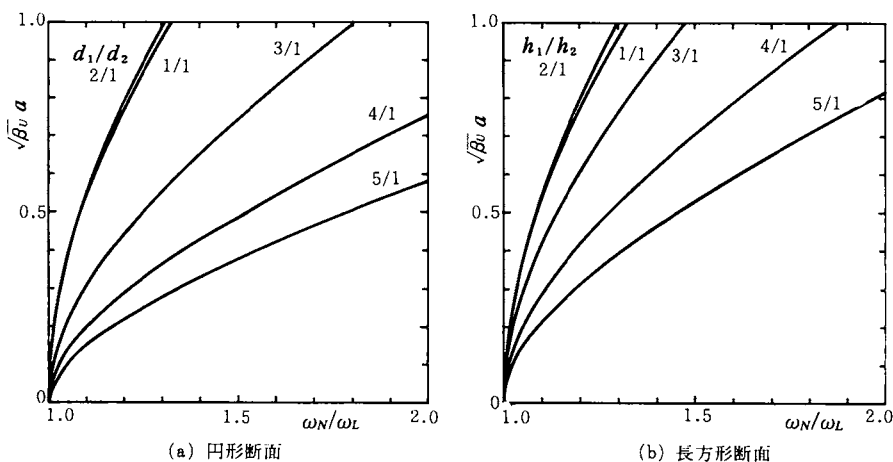
第4図 振動モード ($d_1/d_2=5/1$)

つのに対し、中央部細型では形状により質量的効果をもつ場合とばね的效果をもつ場合があることがわかる。また中央部細型では振動数が最大になる形状があり、そのときの寸法比は $l_2/l = 0.4 \sim 0.5$, d_2/d_1 あるいは $h_2/h_1 = 1/3 \sim 1/4$ のものであって断面形状にはそれほど因らないことがわかる。これらの特性は端部細型の場合、中央部の断面の大きい要素が常に質量的効果を与えるのに対し、中央部細型の場合は端部の大きい断面の要素がばね的働きをする場合と、中央部の小さい断面の要素がばね的效果を弱める結果質量的働きをする場合とがあるためと考えられる。第4図に振動モードの例を示したがこれからその様子がうかがわれる。また、一般

に円形断面の方が長方形断面より固有振動数に及ぼす形状の影響は大きい。

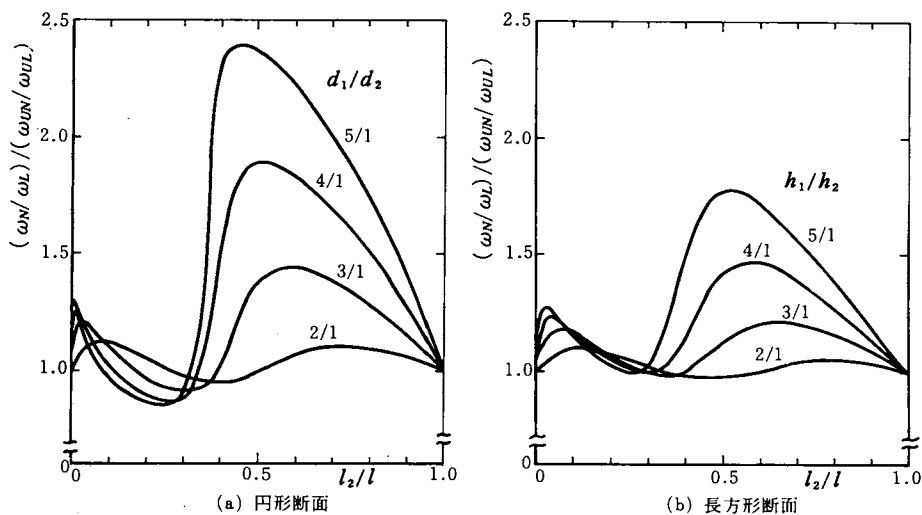
4. 非線形固有振動数特性と曲げ応力

後述のように非線形性が比較的大きく現われる長さ比 $l_2/l=0.5$ の場合を例にとって、中央部細型の場合について、はり中央における無次元振幅 $\sqrt{\beta_U} a$ による非線形固有振動数の変化を第5図に示し

第5図 中央点振幅と固有振動数 ($l_2/l=1/2$)

た。全般的には振幅の増加と共に固有振動数が増加するいわゆる硬いばねの特性を示している。断面寸法の影響をみると $d_1/d_2=2$ あるいは $h_1/h_2=2$ では一様断面はりよりも非線形性がわずかに弱くなっているが、それ以上の断面寸法比では比が大きくなるにしたがって非線形性は強くなっている。

第6図は式(8)に基づいて、振幅 $\sqrt{\beta_U} a=1.0$ の場合の非線形固有振動数と線形固有振動数との比を、一様断面はりの場合の基準にとって示したものである。いいかえれば、非線形性に及ぼす変断面形状の影響を示したものとイえる。図には中央部細型の場合のみを示したがこの結果をみると、断面寸法比が3以上で、 l_2/l が0.4程度より大となる形状では、非線形性が一様断面はりの場合よりも大きく現われることがわかる。最大値は断面寸法比が大となるにしたがい、すなわち固定端側断面が大となるにしたがい大きくなり、また最大値を生ずる長さ比 l_2/l の値は0.5付近に漸近して小さく



第6図 非線形性に及ぼすはり形状の影響

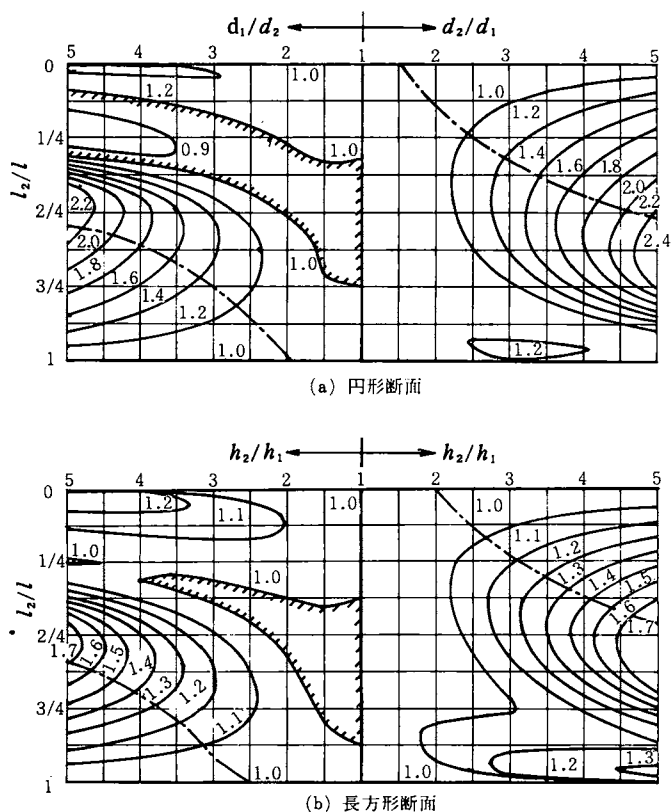
なっている。 l_2/l が0.3程度より小なる場合は断面寸法比にそれほど関係なく一様断面はりの場合の非線形性に近い特性をもつ。

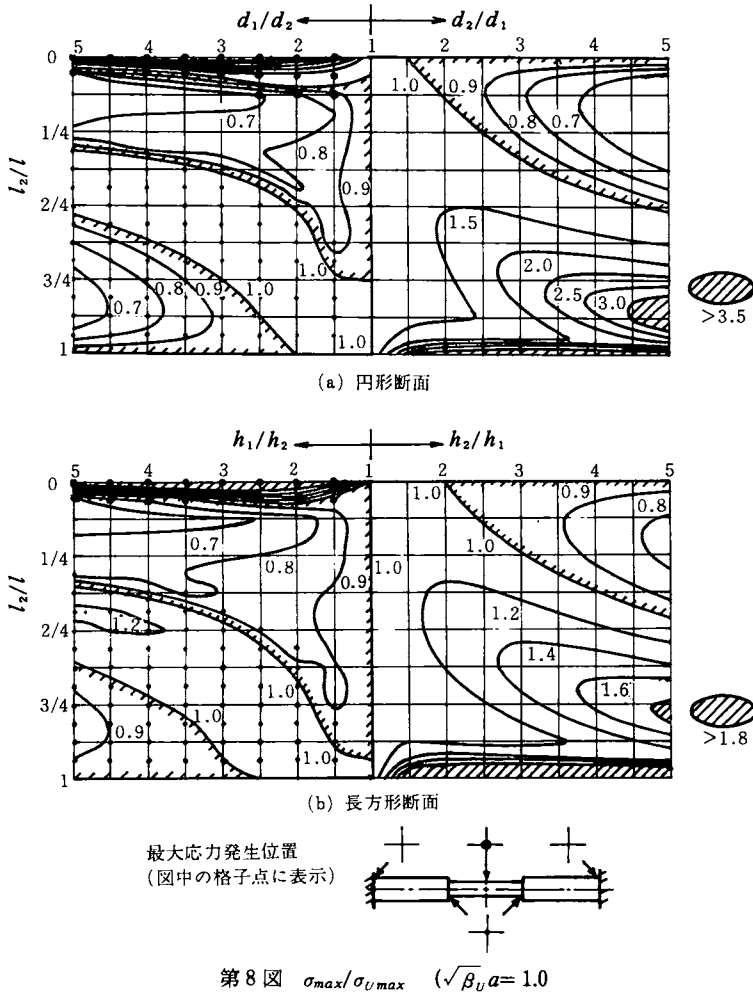
$l_2/l=0.5$ 付近で非線形性が大きくなる理由は第4図の振動モードから明らかなように、これらの形状においては中央部細型の場合でいえば、中央部の断面寸法の小さい要素が長さの割に大きく変形

することにより軸力を増大させる結果と考えられる。端部細型の場合も、第3図のはりの中央が固定端に、固定端が中央になるようなモードとなることから同じような理由が成り立ち、 $l_2/l=0.5$ 付近で非線形性が大きくなる。円形断面と長方形断面の場合では前者の方が形状の変化に対する特性の変化は著しい。

第7図は第6図の値を等高線形式で示したものであり、端部細型の場合も同時に示した。前述のように端部細型の場合も定性的にはよく似た特性を示している。ただし、この形状では一様断面はりの場合と比べて非線形性が小さい値をもつ領域は存在しなく、また中央部細型に比べ、断面寸法比の割合に対し、概して非線形性が大きいといえる。

第8図は第7図に相当する振動において、はりに生ずる最大曲げ応力 σ_{\max} をモード形より計算し、一様断面はりの場合の最大曲げ応力 $\sigma_{U\max}$

第7図 $(\omega_N/\omega_L)/(\omega_{UN}/\omega_{UL})$ ($\sqrt{\beta_U} \cdot a = 1.0$)



(固定端に起る)で無次元化して示したものである。ただし、応力集中などによる影響は考慮していない。図の曲線は、グラフの格子点(l_2/l の値は0.5ごと)の形状に対する値を求め、それを基にして描いたものであり、各格子点には最大応力を発生した位置を記号により記した。この図をみると、一様断面はりの最大応力より低い値をもつ形状の領域が三箇所存在する。第8図と第7図を重ね合せてみると、非線形性が大きく、最大応力が低い形状の領域が大まかにいって第7図の左下側および右上側に存在することがわかる(第7図中 $\sigma_{max}/\sigma_{Umax}=1.0$ の境界を一点鎖線で示した)。また、中央部細型では端部細型と比べて非線形性が大きい場合でも、全般的に最大応力は比較的小さいことがわかる。

線形振動数の第3図と関連して見ると、応力値が低くて、振動数の高い形状は中央部細型で、断面寸法比3以上、長さ比 $l_2/l=0.25\sim 0.3$ 程度のものが適していると考えられる。

これらの関係より、線形固有振動数、非線形性、最大応力などの条件にしたがって段付はりの設計を考えることもできるであろう。たとえば、応力を考慮して、線形固有振動数が高く、非線形性もできるだけ大きくとるためには、円形断面でいえば $d_1>3d_2$ 、 $l_2/l=0.4\sim 0.5$ 程度の形状が適当であろう。

5. 結 言

本研究を要約すると、全長および重量（体積）一定と制限した対称二段段付両端固定はりの 1 次非線形自由振動特性を、線形モードを用いたガレルキン法および調和バランス法を適用して解析し、円形断面と幅一定長方形断面の場合について、その形状の非線形特性に与える影響を明らかにした。また、参考のために線形固有振動数および線形モードに基づく最大曲げ応力についても合せて考察した。得られた結果の主な点を挙げると

- (1) 線形固有振動数については、中央部細型のはりは端部細型のはりと比べて一般に振動数が高く、ほぼ $l_2/l=0.4\sim 0.5$, d_2/d_1 または $h_2/h_1=1/3\sim 1/4$ の形状において最大値をもつ。
- (2) 一樣断面はりに比べると段付はりの非線形性は一般に高く、断面寸法比（直径比あるいは厚さ比）が大なるにつれてその大きさの最大値は増加し、最大値を生ずる長さ比 l_2/l は 0.5 付近に漸近する。
- (3) 最大変位時に生ずる最大曲げ応力は中央部細型の方が全般的に小さい。高い線形固有振動数と非線形性の大きいより形状を得るには応力も考慮に入れると中央部細型で、断面寸法比が 3 以上、長さ比 $l_2/l=0.4\sim 0.5$ 程度が望ましい。
- (4) 円形断面と幅一定長方形断面を比べると、諸特性に与える形状の影響は円形断面の方が顕著である。

最後に本研究に際し、ご指導をいただきました東北大学工学部斉藤秀雄教授に深く感謝の意を表します。また、適切な助言と激励をいただきました本学部小堀与一教授に厚く御礼申し上げます。なお図面作製に協力された本学部小川孝吉技官に感謝します。

参 考 文 献

- 1) Raju, L.S., 他 2 名, *AIAA J.*, 14-2 (1976-2), 280.
- 2) Kanaka Raju, K., 他 2 名, *J. Sound & Vibr.*, 47-4 (1976), 595.
- 3) 佐藤, 機械学会講演論文集, No. 774-6 (1977), 44.
- 4) 佐藤, 金沢大学工学部紀要, 8-2 (昭 49), 89.

付録 対称二段段付両端固定はりの線形固有振動数方程式およびモード関数

本文第 1 図の対称二段段付両端固定はりにおいて、中央点に対し対称なモードを考えると、一端固定、中央点 ($x=l/2$) でローラ端（傾き、せん断力 = 0）の長さ $l/2$ の一段段付はりと考えることができる。段付部で変形、内力の連続条件を考慮すると以下のような固有振動数方程式およびモード関数を得る。

(i) 固有振動数方程式

$$\begin{vmatrix} ch_1 - c_1 & sh_1 - s_1 & -ch_2 & -c_2 \\ sh_1 + s_1 & ch_1 - c_1 & xsk_2 & -xs_2 \\ ch_1 + c_1 & sh_1 + s_1 & -p_1 x_2 ch_2 & p_1 x^2 c_2 \\ sh_1 - s_1 & ch_1 + c_1 & p_1 x^3 sh_2 & p_1 x^3 s_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (A1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ただし, } \quad ch_i &= \cosh \lambda_i \delta_i, & sh_i &= \sinh \lambda_i \delta_i, & p_i &= I_2/I_1, \\
 c_i &= \cos \lambda_i \delta_i, & s_i &= \sin \lambda_i \delta_i, & \kappa &= \lambda_2/\lambda_1, \\
 \lambda_i^4 &= \frac{\rho A_i}{EI_i} \left(\frac{l}{2}\right)^4 \omega_L^2, & \delta_1 &= 2l_1/l, & \delta_2 &= l_2/l, \quad i=1, 2
 \end{aligned}$$

(ii) モード関数

 $\xi = x/(l/2)$ とし、中央点 $\xi=1.0$ における振幅を 1.0 とする。

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_1(\xi) &= D_1(\cosh \lambda_1 \xi - \cos \lambda_2 \xi) + D_2(\sinh \lambda_1 \xi - \sin \lambda_1 \xi) \\
 \phi_2(\xi) &= D_3(\cosh \lambda_2(1-\xi) - \cos \lambda_2(1-\xi)) + \cos \lambda_2(1-\xi)
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \xi \leq \delta_1 \\ \delta_1 < \xi \leq 1 \end{array} \quad (A2)$$

ただし、係数 D_1, D_2, D_3 は次式より求めるものとする。

$$\begin{pmatrix} ch_1 - c_1 & sh_1 - s_1 & c_2 - ch_2 \\ sh_1 + s_1 & ch_1 - c_1 & \kappa(sh_2 + s_2) \\ ch_1 + c_1 & sh_1 + s_1 & -\kappa^2 p_1(ch_2 + c_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 \\ \kappa s_2 \\ p_1 \kappa^2 c_2 \end{pmatrix} \quad (A3)$$

(昭和52年10月22日受理)